www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

OPTION ÉCONOMIQUE

**Concours National d'admission 1990**

# MATHÉMATIQUES I
## Algèbre et analyse

DURÉE : 4 heures

*Avec ce sujet seront distribuées 2 feuilles de papier millimétré.*

**Attention. — Il ne sera pas fourni de feuille supplémentaire.**

**L'utilisation de papiers différents apportés par le candidat serait assimilée à une tentative de fraude.**

*Il est rappelé aux candidats qu'une pénalisation d'un maximum de 2 points (sur 20) sanctionnera le manque de soin apporté à la présentation des copies (fautes d'orthographe, copie peu lisible, ...).*

*Cette épreuve est constituée d'un exercice et d'un problème indépendants.*

---

## EXERCICE (*sur 6 points*)

I. On considère la fonction numérique $g$, de la variable réelle $x$, définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = 3e - 6e \ln|x| + x^3$

où $e$ désigne la base du logarithme népérien.

1° Calculer, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x)$.

2° En déduire que sur $\mathbb{R}_+^*$ $g$ admet un minimum strictement positif.

3° Calculer $g(-e^{\frac{1}{3}})$.

4° En déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

II. On considère la fonction numérique $f$, de la variable réelle $x$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 3e\,\dfrac{\ln|x|}{x^2} + x - 1$

On note (C) la courbe représentative de $f$.

1° Étudier les branches infinies de (C). Préciser la position de (C) par rapport à son asymptote oblique.

2° Calculer $f'(x)$. En déduire, en utilisant les résultats du I les variations de $f$. $\left(\text{On démontrera que : } \forall x \in \mathbb{R}^* : f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}.\right)$

3° Calculer $f''(x)$. En déduire l'existence de 2 points d'inflexion dont on donnera les coordonnées.

4° Construire la courbe (C) dans un repère orthonormé du plan (unité : 2 cm).

5° *a*) Calculer l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$, exprimée en cm$^2$, de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite ($\Delta$) d'équation $y = x - 1$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \lambda$, avec $\lambda > 1$.

*b*) Quelle est la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ quand $\lambda$ tend vers l'infini.
Interpréter graphiquement ce résultat.

6° $m$ désigne un nombre réel.

*a*) Déterminer en fonction de $m$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

*b*) Soit $x_0$, l'unique solution de l'équation : $f(x) = 2$.
Déterminer l'entier naturel $p$ : $\dfrac{P}{100} \leqslant x_0 < \dfrac{P+1}{100}$

## PROBLÈME (*14 points*)

Étude de $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{t^k A^k}{k!}$ où A désigne une matrice carrée et $t$ un réel.

Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

I. On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -8 \\ 6 & 4 & -7 \\ 8 & 6 & -10 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1° Calculer $A^2$ et $A^3$. En déduire $A^n$, $n \geqslant 3$

2° On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

*a*) Démontrer que P est inversible et donner l'expression de son inverse $P^{-1}$

*b*) Expliciter la matrice $T = P^{-1}AP$

*c*) Calculer $T^2$ et $T^3$. Retrouver ainsi l'expression de $A^n$, $n \geqslant 3$

**Tournez la page S.V.P.**

3° $t$ étant un nombre réel donné, on définit la matrice notée $B(t)$ par :

$$B(t) = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2. \quad \textit{On ne cherchera pas à expliciter } B(t)$$

*a*) Calculer $B(0)$

*b*) Démontrer : $\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2 : \quad B(t) \cdot B(t') = B(t + t')$

On notera désormais $B(t) = e^{tA}$

*c*) En remarquant qu'il n'existe pas de réel $\alpha$ tel que $A = \alpha A^2$, démontrer :

$$e^{tA} = e^{t'A} \Leftrightarrow t = t'$$

*d*) Déterminer le réel $t'$ tel que $e^{tA} \cdot e^{t'A} = e^{0}$. En déduire que $e^{tA}$ est inversible et donner l'expression de son inverse.

II. On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1° *a*) Calculer $A^2$

*b*) Démontrer qu'il existe deux réels $u_2$ et $v_2$ tels que :

$$A^2 = u_2 A - v_2 I$$

*c*) En déduire l'existence de deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N} : \quad A^n = u_n A + v_n I$, ces deux suites vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + v_n & (1) \\ v_{n+1} = -6u_n & (2) \end{cases}$$

2° *a*) De l'équation (1) tirer l'expression de $v_n$, $n \in \mathbb{N}$

*b*) En déduire une relation entre $u_{n+2}$, $u_{n+1}$ et $u_n$

*c*) Calculer $u_n$ puis $v_n$ en fonction de $n$.

*d*) En déduire l'expression sous forme de tableau matriciel de $A^n$, $n \in \mathbb{N}$

3° $n$ étant un entier naturel, on considère la matrice $S_n$ définie par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k A^k}{k!}$, $t$ désignant un nombre réel.

*a*) Expliciter la matrice $S_n$ en écrivant ses quatre éléments notés $s_{11}^{(n)}$, $s_{12}^{(n)}$, $s_{21}^{(n)}$, $s_{22}^{(n)}$

*b*) On note pour $1 \leqslant i \leqslant 2$ et $1 \leqslant j \leqslant 2$ :

$$s_{ij} = \lim_{n \to +\infty} s_{ij}^{(n)}$$

et $S(t)$ la matrice carrée d'ordre 2 dont les éléments sont les $s_{ij}$.

Démontrer que $S(t) = \begin{pmatrix} 2e^{3t} - e^{2t} & -e^{3t} + e^{2t} \\ 2e^{3t} - 2e^{2t} & -e^{3t} + 2e^{2t} \end{pmatrix}$

*On rappelle :* $$\lim_{n \to +\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$$

où $\lambda$ désigne un nombre réel quelconque.

4° *a*) Déterminer les matrices P et Q telles que : $S(t) = P \cdot e^{3t} + Q \cdot e^{2t}$

*b*) Calculer $P^2$, $Q^2$, PQ et QP

*c*) En déduire : $\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2 : \quad S(t) \cdot S(t') = S(t + t')$, puis $[S(t)]^n = S(nt)$, $n \in \mathbb{N}$

On notera désormais $S(t) = e^{tA}$

5° Application : $f$ et $g$ désignent deux fonctions réelles de la variable réelle $t$, définies, dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant le système :

$$\forall t \in \mathbb{R} : \begin{cases} f'(t) = 4f(t) - g(t) \\ g'(t) = 2f(t) + g(t) \end{cases} \quad f(0) = 2 \quad g(0) = 5$$

On pose : $$\forall t \in \mathbb{R} : \quad Y(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y'(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}$$

Le système proposé s'écrit alors : $\forall t \in \mathbb{R} : \quad Y'(t) = AY(t)$

*a*) Vérifier que $Y(t) = e^{tA} Y(0)$ est solution du système proposé.
(On explicitera $Y(t)$ en utilisant l'expression de $e^{tA}$ obtenue au 3°.)

*b*) $\alpha$) Préciser la nature des branches infinies de $C_f$, courbe représentative de $f$

$\beta$) Étudier les variations de $f$

$\gamma$) Démontrer que $C_f$ admet un point d'inflexion dont on donnera les coordonnées.

$\delta$) Construire la courbe $C_f$ dans un repère orthogonal. (Unités : 5 cm en abscisses; 2 cm en ordonnées.)

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail